Section3

Regular Simplex Method

Steps to solve using "Regular Simplex Method":

1. Standard Form.
2. Initial basic feasible solution "BFS"
3. Make first tableau.
4. Test optimality → Min : $C_j - E_j$
   → Max : $E_j - C_j$
5. If not optimal iterate for another BFS using feasibility test → $\frac{R.H.S}{\text{work Col.}}$

Example:

→ min : $z = 4x_1 - x_2$

Sub. to :

$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_2 \le 5$$
$$x_1 - x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Solution:

1. Standard Form:

→ All variables ≥ 0 ✓

→ $b \ge 0$ ✓

→ Inequality

- $\ge$ → Add Art. / Add Surplus
- $\le$ → Add slack
- $=$ → Add Art.

Sub.to:

$2x_1 + x_2 + S_1 = 8$

$x_2 + S_2 = 5$

$x_1 + x_2 + S_3 = 4 \rightarrow S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Min $Z = 4x_1 - x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

2. Initial Basic Feasible Solution "IBFS":

→ To get IBFS:

Basic Variables → Unique to the Constraint
→ Coef $\underline{\underline{+1}}$

IBFS → $S_1 = 8$, $S_2 = 5$, $S_3 = 4$ → Basic Variables

→ $x_1 = x_2 = 0$ → Non-Basic Variables

Note:

IBFS → حل بيحقق كل الـConstraints بس مش Optimal

3. Make 1st tableau:

B.V	C_j	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	θ → Feasibility test $= \frac{R.H.S}{\text{Work Col.}}$
		4	-1	0	0	0		
S_1	0	2	1	1	0	0	8	8
S_2	0	0	*1	0	1	0	5	5
S_3	0	1	-1	0	0	1	4	-4
	E_j	0	0	0	0	0		
	$C_j - E_j$	4	-1	0	0	0	→ Basic var must be zero	

Note:

- في الـ $C_j - E_j$ لو عندي كذا واحدة -ve باخد الـ "most -ve"
- في الـ Feasibility test ، باخد أقل قيمة +ve

Keep attention:

* if $\theta = [\frac{0}{-3}, \frac{0}{4}, \frac{3}{0}, 4, 2]$

* أصغر قيمة هي $\frac{0}{4}$ لأن هي $= 0$ ، ومابنفعش أخد $\frac{0}{-3}$ لانه zero جاي من -ve

ولو كلهم -ve وفي $\frac{3}{0}$ ، مابنفعش آخدها علشان ده ، يبقى ساعتها الـ System $\longrightarrow$ has no sol. "Unbounded".

* Work row $\rightarrow$ Determines "Depart" Variable

Work Col $\rightarrow$ Determines "Entery" Variable

- We should make the pivot = 1, and the remaining of the Column = 0

1) $R_3^{new} = R_3^{old} + R_2^{old}$

2) $R_1^{new} = R_1^{old} - R_2^{old}$

B.V		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
		4	-1	0	0	0	
S_1	0	2	0	1	-1	0	3
x_2	-1	0	1	0	1	0	5
S_3	0	1	0	0	1	1	9
$C_j - E_j$		4	0	0	1	0	

$\longrightarrow$ مافيش -ve يبقى ده "optimal"

Note: R.H.S must be +ve

So, $S_1 = 3$

$X_2 = 5$

$S_3 = 9$

And $X_1 = S_2 = 0$

$Z = 4X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$= 4(0) - (5) + 0 + 0 + 0 = -5$

* Solve using pivot

BV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Ratios
S_1	2	1	1	0	0	3
S_2	0	*1	0	1	0	5
S_3	1	-1	0	0	1	4

$$S_1 = \frac{(1*1) - (0*1)}{\text{Pivot}}$$

Example:

Max : $Z = 2x + 4y$

Sub. to :

$x + 2y \le 5$

$x + y \le 4$

$x, y \ge 0$

Solution:

1. Standard Form:

→ All variables ≥ 0

→ $b \ge 0$

→ Inequality

So, Max : $Z = 2x + 4y + 0S1 + 0S2$

Sub. to :

$x + 2y + S1 = 5$

$x + y + S2 = 4$

$x, y, S1, S2 \ge 0$

2. Initial Basic Feasible Solution "IBFS" :

→ $S1 = 5$

$S2 = 4$

$x = y = 0$

3. Draw First Tableau:

		x	y	S1	S2	R.H.S	θ
	$c_j \rightarrow$	2	4	0	0		
S1	0	1	2*	1	0	5	$\frac{5}{4} = 2.5$ Smallest +ve
S2	0	1	1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$
	$E_j - C_j$	-2	-4	0	0		

θ → Feasibility test

→ Most -ve

Pivot = 2, So divide R1 by 2

		x	y	S1	S2	R.H.S	θ
		2	4	0	0		
y	4	1/2	1	1/2	0	5/2	5
S2	0	$\frac{(2*1)-(1*1)}{2}$	0	$\frac{(2*0)-(1*1)}{2}$	$\frac{(2*1)-(0*1)}{2}$	$\frac{(2*4)-(5*1)}{2}$	3
		$\frac{(-2*2)-(-4*1)}{2}$ → zero	0	$\frac{(2*0)-(-4*1)}{2}$ → 2	$\frac{(2*0)-(0*-4)}{2}$ → zero		

So, Solution is Optimal.

→ y = 2.5

S2 = 1.5

x = S1 = 0

$z = 2x + 4y + 0S1 + 0S2 = 2(0) + 4(2.5) + 0 + 0 = 10$

Note:

- لما أوصل للـ Optimal ولقيت zero في $(E_j - C_j)$ أو $(C_j - E_j)$ عند الـ Non basic

يبقى أنا عندي "Infinite Sol" بس برضه بجيب الـ Z^* عادي بالـ values اللي عندي

- علشان نتأكد، ندخل الـ var اللي الـ value بتاعته بـ zero ونجرب

$x \rightarrow$ Entry

$S_2 \rightarrow$ Depart

B.V.	x	y	S_1	S_2	
y	0	1	1	1	1
x	1	0	-1	1	3
$E_j - C_j$	0	0	2	0	

$y = 1$ and $x = 3$

$Z = 2x + 4y + 0S_1 + 0S_2$
$= 2(3) + 4(1) = 10$

*To Sum up:

١- لو عدد الـ zeros اللي تحت = عدد الـ Basic ← unique Sol.

٢- لو عدد الـ zeros > عدد الـ Basic ← Infinite Sol

٣- لو أنا بختار الـ Basic لقيت الـ Col كله ≤ 0 بيبقى ← unbounded