Text book :- Problems in Operations Research, Gupta, 10th edition.
:- Operations Research, Shaum.

(1)

Subject: not pure Mathematics
↳ it is use techniques + statistics and Programming to solve complex problems

Date: Section "1"

Operation Research "OR"

فيه مشكلة وعندي هدف "objective" لازم أحققه وعاوز نوصل لأعلى optimal "أفضل حل"

_ is a discipline that deals with the application of advanced analytical methods to help make better decisions. In operations research, Problems are broken down into basic Components and then solved in defined steps by mathematical analysis.

التحسين "جعله أفضل ما يكون للشغل"

** The central objective of operations research is optimization, i.e., "to do things best under the given circumstances." "Constraints"

هو تخصص يتعامل مع تطبيق أساليب تحليلية متقدمة للمساعدة في اتخاذ قرارات أفضل "حل أفضل للمشاكل". تكون بحوث العمليات من مجموعة من الأساليب (الطرق) المختلفة للبحث عن الحل الأمثل للحصول على أقل تكلفة ممكنة أو أكبر ربح ممكن. ما نقدرش نقول إنها Pure Math ولكن هي بيحول المشكلة لـ Math لإيجاد حل. يتم تقسيم المشكلات إلى مكونات أساسية ثم يتم حلها في خطوات محددة عن طريق التحليل الرياضي.

** جعله أفضل ما يكون

Optimization :- is a branch of OR which uses mathematical techniques such as linear and nonlinear Programming to derive values for system variables that will optimize Performance. * يعني مثلاً عندي مصنع عاوزة أوصل إنتاجية داخلية أفضل *

• Use Mathematics to solve real life Problems (in business, industry, health care, ---)

(2)

• Problem $\xrightarrow{\text{convert}}$ Math "equations"
نحوّلها رياضياً

↳ ① Mathematical Modeling ② Solve this Problem.

> لحل الأداء أفضل مايكون بجيب قيم لمتغيرات النظام التي من شأنها
> تحسين الأداء: "يعني القيم اللي هتخلي أفضل مايكون" ← يؤدي لأفضل
> حل

(*٢) Optimization Problems :-

In an optimization problem we min or max a Specific quantity "Objective", which depends on a finite number of variables. These variables may be independent of one another or may be related through one or more Constraints.

(*٣) • Objective
- Maximize "Profit, Production, Performance, ---
- Minimize " Time, Cost, Effort, Risk, ----

> عشان أوصل لأفضل حل للمشكلة اللي عندي بيكون ده على حسب
> هدفي فلو مثلاً أنا عاوزة أربح أو زيادة إنتاج أو تحسين أداء...
> فده معناه إن الهدف هو الزيادة "Max". طب لو أنا عاوزة
> أقل وقت أو تكلفة أو مجهود أو خطر معين في المشكلة فده معناه
> إن الهدف هو التقليل "Min".

(*٤) • The Two Main Phases in Optimization Problem :-

① Objective
- Max
- Min

Subject:

Date:

(2) Constraints: (**)

S.t.

Subjected to ..

إنه عندي شوية قيود بمعنى آمر عاوز أحسن الإنتاج بس لازم المصنع
بينتج كمية معينة أو عاوز أشتغل أيام معينة..

(**) Mathematical Program:-

- A mathematical program is an optimization problem in which the objective and constraints are given as mathematical functions and functional relationships.

- Mathematical Programs have the form:- (**)

(1) Optimize: $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ → Objective

(2) Subjected to "s.t.": → Constraints

$$\left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

each of the m Constraint relationships involves one of the three signs $\leq$, $=$, $\geq$

(3) $x_j \geq 0$, for $j = 1, 2, \dots, n$. أي كل المتغيرات لازم موجب

→ hidden Conditions. Generally they involve non negativity or integer requirements on the input variables.

عدد ذكيات مينفعش نبيع كام ونص منه أو عدد بنطلون

إن أنا بحط قيد معنى إن لازم كل الـ Variables يكونوا موجبين

ليه hidden لأني أنا بفهمه لوحدي من المسألة
إن لازم يبقى أكبر من الصفر زي مثلاً عدد حاجة أو وقت وهكذا

مفيش يبقى سالب أو زي إن أنا عندي مكافأة زي مدارة بالسالب كده

Subject: Date:

Problem Formulation:- "Modeling the problem with Mathematical Program"

Step 1: Determine the quantity to be obtimized and express it as a mathematical function.

Step 2: Identify all requirements, restrications and limitations and express it as a mathematical function.

في أي Optimization Problems أول خطوة : لازم أعرف كل الـ variables بتعبر عن إيه.

الخطوة التانية: أكتب المشكلة اللي عندي على هيئة الـ Mathematical Program

ودايماً عندنا أخر شرط : ن لازم كل الـ variables يكونوا موجبين.

*٣

Example:

$$\text{Min}: Z = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{S.t}: \quad x_1 - x_2 = 3$$

$$x_2 \geq 2$$

أنا عندي متغيرين x_1, x_2 بيعبروا عن حاجة معينة الهدف عاوزة أقلل مجموع مربعاتهم من بعض القيود

عاوزة أدور على قيم لل x_1 x_2 عشان تديني أقل قيمة لل Z

is an optimization problem for the objective Z. The input variables are x_1 and x_2, which are constrained in two ways: x_1 must exceed x_2 by 3 and also x_2 must be greater than or equal to 2.

it is desired to find values for the input variables which minimize the sum of their squares, subjected to the limitations imposed by constraints.

- After modeling the problem there is more than one method to solve by:
  - → Graphically "2 Variables"
  - → Theoritically

Problems :-

(1) Factory works for 50 hours per week, it produces 2 kinds of games

	Manufacturing تصنيع	ثمن البيع Sale
Game I	اللعبة الأولى تحتاج وقت (الواحدة) 3.5 h	28 $
Game II	اللعبة الثانية تحتاج وقت 4 h	31 $

How many games of $game_I$, $game_{II}$ should be produced to maximize the profit?

Solution → عاوز عدد اللعب اللي هينتجها من I و II عشان نزود الربح وهو ده فيه قيود معينة زي عدد الساعات

(1) Decision variables (متغيرات القرار) :-

$x_1 \equiv$ the number of $game_I$ product weakly.

$x_2 \equiv$ the number of $game_{II}$ product weakly.

(2) Modeling the problem :-

Objective :- Maximize the profit (زيادة الربح من بيع اللعبة يعني عاوزة انتاج زيادة للعبة عشان أكبر ربح)

$$Max: Z = 28x_1 + 31x_2$$

انتاج اللعبة الأولى في بيعها يديني المكسب اللي منها	انتاج اللعبة الثانية في بيعها يديني المكسب اللي منها

Z : عاوزة أكبر الربح منهم هم الاثنين

Constraints :

Subjected to : عدد اللعب اللي انتجتها الشركة في عدد الساعات لإنتاج اللعبة التانية

المصنع بيشتغل 50 ساعة في إنتاج اللعبة الأولى والتانية لازم مايعديش الـ 50 ساعة

$$3.5x_1 + 4x_2 \le 50$$

عدد اللعب اللي انتجتها الأولى في عدد الساعات لإنتاج اللعبة

$$x_1, x_2 \ge 0$$

hidden constraint : x_1, x_2 must be +ve

لأنه بيعبر عن عدد.

Graphical Solution of optimization problems

2D Problems

(1) لو الـ hidden cont " $x_1, .., x_n \ge 0$ " فده معناه ان هنرسم في الربع الأول.

(2) عشان نحدد المنطقة اللي بتحتوي على الـ feasible solution هنرسم ⇐ المساحة اللي بتحقق كل الـ constraints

كل الـ Constraints :- ديما بنحليها = هما انت > او ≥ او < او ≤

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1 \rightarrow ①$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2 \rightarrow ②$$

using ①, ②, ..., ⓝ ; Put $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = ?$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = ?$

$$a_n x_1 + b_n x_2 = c_n \rightarrow ⓝ$$

يعني هنحط في المعادلات مرة الـ $x_1=0$ وهنشوف الـ $x_2=?$ والعكس.

هنحط الـ $x_2=0$ وهنشوف الـ $x_1=?$.

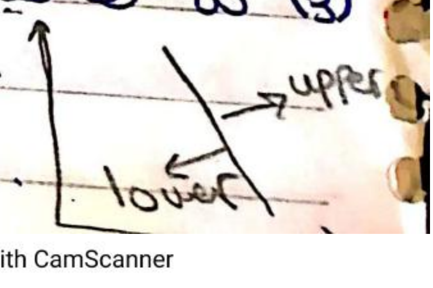
بعد مانرسم كل الـ Constraints ونشوف بتقاطعوا في انهي منطقة وتكون منطقة التقاطع دي هي الـ space of feasible solution.

(3) كل خط هيقسم المساحة إلى ٣ أجزاء

upper → Most of times > function.

lower → Most of times < function.

Line → Always = function.



Subject: Date:

يعني عشان نطلع أنهي مساحة اللي هاناالي فوق الخط ولا اللي تحت هنعوض بأي نقطة فوق أو تحت الخط، النقطة اللي هتحقق القيد اللي في المعادلة هي دي المنطقة اللي محايا. والمنطقة اللي مابين النقط المشتركة اللي بتحقق القيود هي دي الـ feasible area و هو الجزء اللي فيه كل الحلول اللي بيديني الـ Max أو الـ Min وبنختار منهم أفضل نقطة فيهم اللي بتحقق الـ Max أو الـ Min بتاع الـ Z.

(4) عشان نختار النقاط اللي بتحقق الـ optimal sol عندي طريقتين:

① نعوض كل النقط في الـ feasible area ونختار النقطة اللي بتحقق الـ Max أو الـ Min كل حسب الهدف بتاع المسألة

② نرسم الـ Z اللي هو الخط بتاع الـ Max أو الـ Min

let $Z = a x_1 + b x_2$ كمان نقدر القسمة على الـ a,b

using the multiples of the product of ab, then

Put Z by this multiple of ab

$\therefore a x_1 + b x_2 = c$

let $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{c}{b}$ $\Rightarrow$ لازم الخط مايكونش جوا الـ Feasible area.

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{c}{a}$

ونرسم الخط ده وبعدين وناخد نقطة فوق وتحت الخط ونشوفها بتحقق الـ max، أو الـ min بتاعت الـ Z عشان أشوف هحرك الخط ازاي.

③ لو عاوز الـ Max هختار آخر نقطة في الـ Feasible area هتخبط في الخط، لو عاوز الـ Min هختار أول نقطة في الـ Feasible area هتخبط في الخط.

* طريقة أخرى لرسم الـ Z ← هحط الـ Z=0 وهدور على تلات نقاط أو 2 تحقق المعادلة $a x_1 + b x_2 = 0$ بتبقى منهم أكيد (0,0) والنقطة التانية اللي هتدي الـ Zero هي $(-b, a)$ أو $(b, -a)$ حيث

$\therefore (a)(b) + (b)(-a) = 0$

$(a)(-b) + (b)(a) = 0$

Subject: Date:

(1) Example:

Maximize: $Z = 20x_1 + 30x_2$

Subject to:

$$0.4x_1 + 0.3x_2 \leq 18$$

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \leq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution:

(1) let $0.4x_1 + 0.3x_2 = 18 \rightarrow$ ①

Put $x_1 = 0 \rightarrow 0.3x_2 = 18 \rightarrow x_2 = 60$

$\therefore$ 1st point of first line $(0, 60)$

$x_2 = 0 \rightarrow 0.4x_1 = 18 \rightarrow x_1 = 45$

$\therefore$ 2nd Point of first line $(45, 0)$

let $0.2x_1 + 0.4x_2 = 14 \rightarrow$ ②

Put $x_1 = 0 \rightarrow 0.4x_2 = 14 \rightarrow x_2 = 35$

$\therefore$ 1st Point of 2nd line $(0, 35)$

$x_2 = 0 \rightarrow 0.2x_1 = 14 \rightarrow x_1 = 70$

$\therefore$ 2nd Point of 2nd line $(70, 0)$

(2) هنشوف بنقطة تحت أو فوق الخط ① والخط ②

- هاخد (0,0) واقيسه تحت الخط ① ونشوف هتحقق الشرط

$0.4(0) + (0.3)(0) \leq 18$ ولا لأ، حققت الشرط وطلعت أقل من 18

$\therefore$ هاخد المنطقة اللي تحت الخط. لو خدنا أي نقطة فوق الخط مش

هتحقق الشرط هيرفضوا هاخد المساحة اللي تحت ومثلاً لو أخدت

النقطة (60,20) فوق الخط $0.4x_1 + 0.3x_2$ هنعوض هتطلع 30 لأ مش أقل من الـ 18

فهاخد المساحة اللي تحت.

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 10$ ... يقبل القسمة على ... ممكن نختار اي رقم

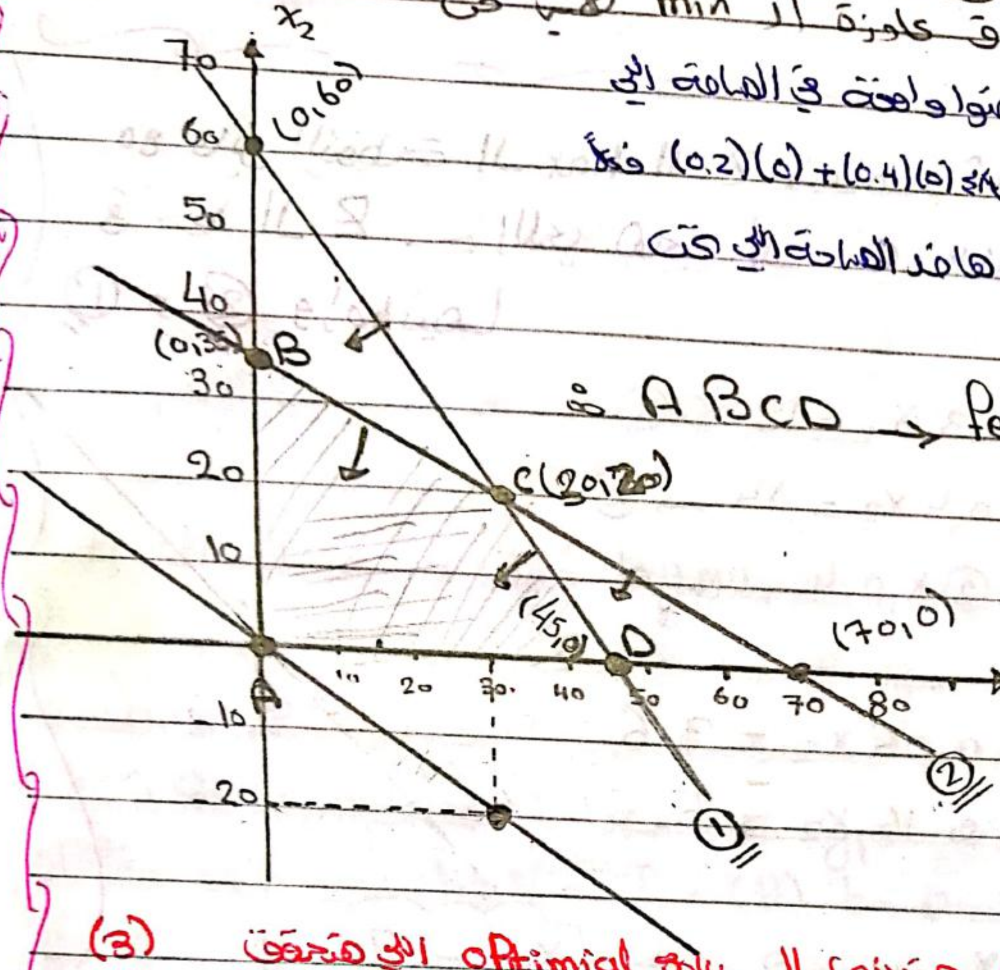
$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 15 \Rightarrow (0,10), (15,0)$

Subject:

(9)

وهختار نقطة فوق الخط داه وكمان لما كانت عاوزة ال Max

هي فوق عاوزة ال min هي تحت



- هاخد ال (0,0) يعوضوا واحدة في المعادلة اللي في الخط ② ← هلاقي $(0.2)(0) + (0.4)(0) \leq 14$ فدا أقل من 14 ≥ ∴ هاخد المساحة اللي تحت الخط.

∴ ABCD → feasible area.

(3) ايجاد النقطة اللي هتديني ال optimial solu اللي هتحقق ال Max لل Z بطريقتين :- واحدة من النقاط ABCD هي اللي هتحقق ال Z

(a) using the line of Z

∴ $Z = 20x_1 + 30x_2$

$(20)(30) = 600$ using the multiples of 600 like $1200, 1800, \ldots$

let $20x_1 + 30x_2 = 1200$

If $x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{1200}{30} \longrightarrow x_2 = 40$

$x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{1200}{20} \longrightarrow x_1 = 60$

∴ the two points of the line $Z = (0,40)$ and $Z = (60,0)$

(30,-20) و (0,0) فهاخد

هيطلع الخارجوا ال area معا أخد نقطتين يعوضوا وقدر ال (0,0) أسهل حاجة

العزل

Subject: Date:

فمع عايز النقطة الـ Max الـ Z فهاخد آخر نقطة تخبط في خط الـ Z . = اللي هي الـ C "نقطة التقاطع بين الخطين ① و ② وإحداثيها

$0.4X_1 + 0.3X_2 = 18 \rightarrow ①$

$0.2X_1 + 0.4X_2 = 14 \rightarrow ②$

① × 0.2 − ② × 0.4 , we get

$0.08X_1 + 0.06X_2 = 3.6$

$- \; 0.08X_1 + 0.16X_2 = 5.6$

$-0.1X_2 = -2 \Rightarrow \boxed{X_2 = 20}$

put $X_2 = 20$ in ① , we get:-

$0.4X_1 + (0.3)(20) = 18$

$0.4X_1 + 6 = 18 \rightarrow 0.4X_1 = 12 \rightarrow \boxed{X_1 = 30}$

∴ C = (30, 20) is the optimal feasible solution

(b) Using the points of the feasible area.

The point that satisfy the objective "Max $Z = 20X_1 + 30X_2$"

is the optimal feasible solution.

∴ $Z = 20X_1 + 30X_2$

Using the corners of the feasible area.

A : (0,0) → $Z = 20(0) + 30(0) = 0$

B : (0,35) → $Z = 20(0) + 30(35) = 1050$

C : (30,20) → $Z = 20(30) + 30(20) = 1200$ → Max

D : (45,0) → $Z = 20(45) + 30(0) = 900$

ملحوظة: لو عندي أكثر من نقطة بتحقق الـ Max أو الـ Min اللي هو الهدف بتاعنا يبقى النقط دي كلها optimal solution ويبقى عندي أكثر من optimal solution، وأي نقطة واقعة على الخط الواصل بين النقاط دي تعتبر برضو optimal solution حتى لو عوضنا بأي نقطة على الخط ده في الـ Z هتطلع نفس قيمة النقاط دي.

(5)

Problem (2):

A Small generator burns 2 types of fuel low Sulfur (L) and high sulfur (H) to produce electricity. for each hour of use, each gallon of (L) emits 3 units of sulfur, generates 4 kw and Costs 60 Cents, while each gallon of (H) emits 5 units of sulfur, generates 4 kw and Costs 50 Cents. The environmental protection agency insists that Max amount of sulfur that can be emitted per hour is 15 units, suppose that at least 16 kw must be generated per hour. How many gallons of L and H should be used hourly to minimize the Cost of the fuel?

مولد كهرباء، يحرق، الوقود، منخفض الكبريت

Total amount of sulfur → constrains (1)

constrains (2)

objective

مولد صغير بيحرق نوعين من الوقود منخفض الكبريت وعالي الكبريت لإنتاج الكهرباء

Solution

Subject: Date:

كل جالون بيطلع
بيولد
التكلفة

Type of fuel	each gallon emits	generates	Cost
Low sulfur "L"	3 units of sulfur dioxide ثاني أكسيد الكبريت	4 KW	60 cents
High sulfur "H"	5 units of sulfur dioxide	4 KW	50 cents

→ The Max amount of sulfur that can be emitted per hour is 15 units. أقصى حد للثاني أكسيد الكبريت المنبعث

→ Suppose that at least 16 KW must be generated per hour. وبيولد على الأقل 16KW

(1) Decision Variables:-

amount of gallons

x_1 ≡ amount of low sulfur that can be emitted per hou

x_2 ≡ amount of High sulfur that can be emitted per hour

(2) Modeling the problem:-

Objective:- Min the cost of fuel. عاوز يقلل تكلفة الوقود

التكلفة الكلية (H) + (L)

$$\text{Min } Z = 60x_1 + 50x_2$$

كمية الكبريت (L) المستخدمة في الساعة X سعر الجالون هيديني
كمية الكبريت (H) المستخدمة في الساعة X سعر الجالون هيديني تكلفة الـ (H)
التكلفة تبعت الـ (L)

Constraints:- الواحد بـ emit 3unit

Subject to $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$4x_1 + 4x_2 \geq 16$

$x_1, x_2 \geq 0$ → # ليه أكبر من الصفر عشان بيعبروا عن كمية #

(3) Graphical Solution:-

(1) Let $3x_1 + 5x_2 = 15 \rightarrow$ (1)

Put $x_1 = 0 \rightarrow 5x_2 = 15 \rightarrow x_2 = 3$

∴ 1st Point of first line (0, 3)

$x_2 = 0 \rightarrow 3x_1 = 15 \rightarrow x_1 = 5$

∴ 2nd Point of first line (5, 0)

Let $4x_1 + 4x_2 = 16 \rightarrow$ (2)

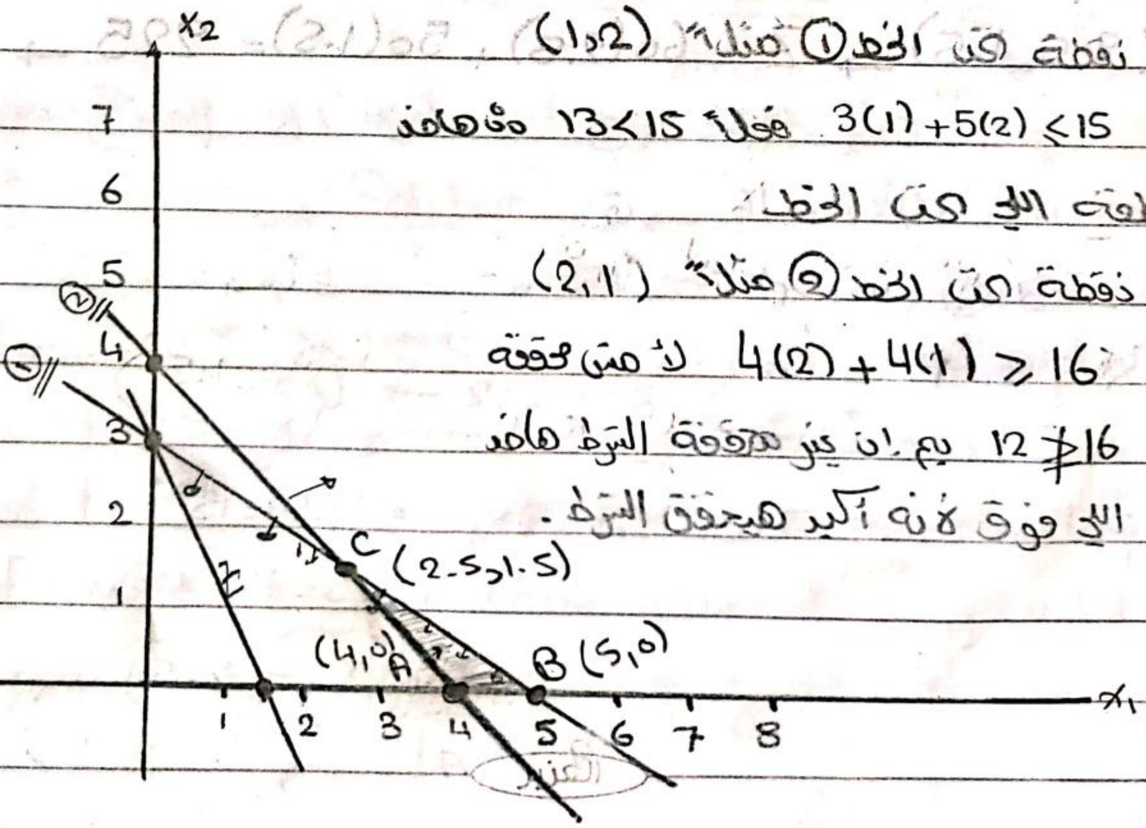
Put $x_1 = 0 \rightarrow 4x_2 = 16 \rightarrow x_2 = 4$

∴ 1st Point of 2nd line (0, 4)

$x_2 = 0 \rightarrow 4x_1 = 16 \rightarrow x_1 = 4$

∴ 2nd point of 2nd line (4, 0)

(2)



• هاخد نقطة من الخط ① مثلاً (1,2)

هل $3(1)+5(2) \leq 15$ فعلاً $13<15$ فهاخد

المنطقة الي تحت الخط.

هاخد نقطة من الخط ② مثلاً (2,1)

هل $4(2)+4(1) \geq 16$ لا مش محققة

لأن $12 \ngeq 16$ يبقى انا مش محققة الشرط هاخد

الجزء الي فوق لأنه أكيد هيحقق الشرط.

Subject: Date:

∴ ABC is a feasible area.

③ The point that Min $Z = 60x_1 + 50x_2$

(a) using the line of Z :-

أدور على رقم ينقسم على معاملات الـ X_1 ، X_2 ويطلع نقطتين ترسم من الخطوط اللي عايزها

$$60x_1 + 50x_2 = 150$$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{150}{50} \rightarrow x_2 = 3$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{150}{60} \rightarrow x_1 = 2.5$

∴ the two points $(0,3)$, $(2.5, 0)$

هامشي بالمسطرة الخط Z لحد ما يخرج في أول نقطة في الـ feasible area

عشان بندور على الـ Min وهي اللي تحقق داه النقطة C

C: $(2.5, 1.5)$

(b) using the Corners ABC of the feasible area:-

A: $(4,0) \rightarrow Z = 60(4) + 50(0) = 240$

C: $(2.5, 1.5) \rightarrow Z = 60(2.5) + 50(1.5) = 225 \rightarrow$ Min

$3x_1 + 5x_2 = 15 \rightarrow ①$

$4x_1 + 4x_2 = 16 \rightarrow ②$

$4 \times ① - 3 \times ②$, we get

$$\begin{aligned} \cancel{12x_1} + 20x_2 &= 60 \\ - \cancel{12x_1} \mp 12x_2 &= \mp 48 \end{aligned} \Bigg\} \; 8x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 1.5$$

put $x_2 = 1.5$ in ① : $3x_1 + 5(1.5) = 15$

$3x_1 + 7.5 = 15 \rightarrow 3x_1 = 7.5$

∴ $x_1 = 2.5$

Subject: Date:

$B: (5,0) \rightarrow Z = 60(5) + 50(0) = 300$

$\therefore$ $C: (2.5, 1.5)$ is the optimal feasible solution ✱

(3)

صندوق استثمان بيمول سفقتين B,A

Problem (3):

يخطط لاستثمار مايصل إلى 6000$

صندوق استثمان

A trust fund is planning to invest up to 6000 $ in 2 types of bonds A and B, bond A is safer than bond B, and A carries a dividend of 8% and B carries a dividend of 10%. Suppose that the funds rules state that no more than 4000 $ may be invested in bond B, while at least 1500 $ must be invested in bond A. How much should be invested in each type of bond to maximize the funds return?

السفقات "سفقة"

يعطي أرباحا

التمويل

الفلوس اللي هنجدلهم

اللي هنرجعلها لازم يعني كبير من اللي استثمرتوا في ال A,B ⇐ يعني عاوزة أزود الربح العائد للصندوق

Solution

bonds (السفقات)	Carries a dividend (الربح)
A	8% = 0.08
B	10% = 0.1

- The Max amount of money invested in two bonds is 6000 $.
- The amount of money invested in bond B is no more than 4000 $.
- The amount of money invested in bond A is at least 1500 $.

العزيز

(16)

Subject: Date:

(1) Decision Variables :-

$x_1 \equiv$ The amount of money invested in bond A.

$x_2 \equiv$ The amount of money invested in bond B.

(2) Modeling the Problem :-

Objective :- Max the fund return.

الربح الكلي

$\text{Max } Z = 0.08x_1 + 0.1x_2$

الفلوس اللي استثمرها في السفقة A X الربح العائد منها ← الفلوس اللي أستثمرها في السفقة B X الربح اللي مقابل ليها

Constraints :-

Subject to $x_1 + x_2 \le 6000$

$x_2 \le 4000$

$x_1 \ge 1500$

$x_1, x_2 \ge 0$

ليه حطيت الـ hidden دي؟ لأن

هنا بنتكلم عن فلوس مصروفة فلازم موجب.

(3) Graphical Solution :-

(1) Let $x_1 + x_2 = 6000 \longrightarrow (1)$

Put $x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 6000$

$\therefore$ 1st Point of 1st Line is $(0, 6000)$

$x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 6000$

$\therefore$ 2nd point of 1st Line is $(6000, 0)$

Scanned with CamScanner

let $x_2 = 4000 \longrightarrow$ ②

Put $x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = 4000$

$\therefore$ the Point of 2^{nd} line is $(0, 4000)$

let $x_1 = 1500 \longrightarrow$ ③

Put $x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 1500$

$\therefore$ the Point of 3rd line is $(1500, 0)$

②

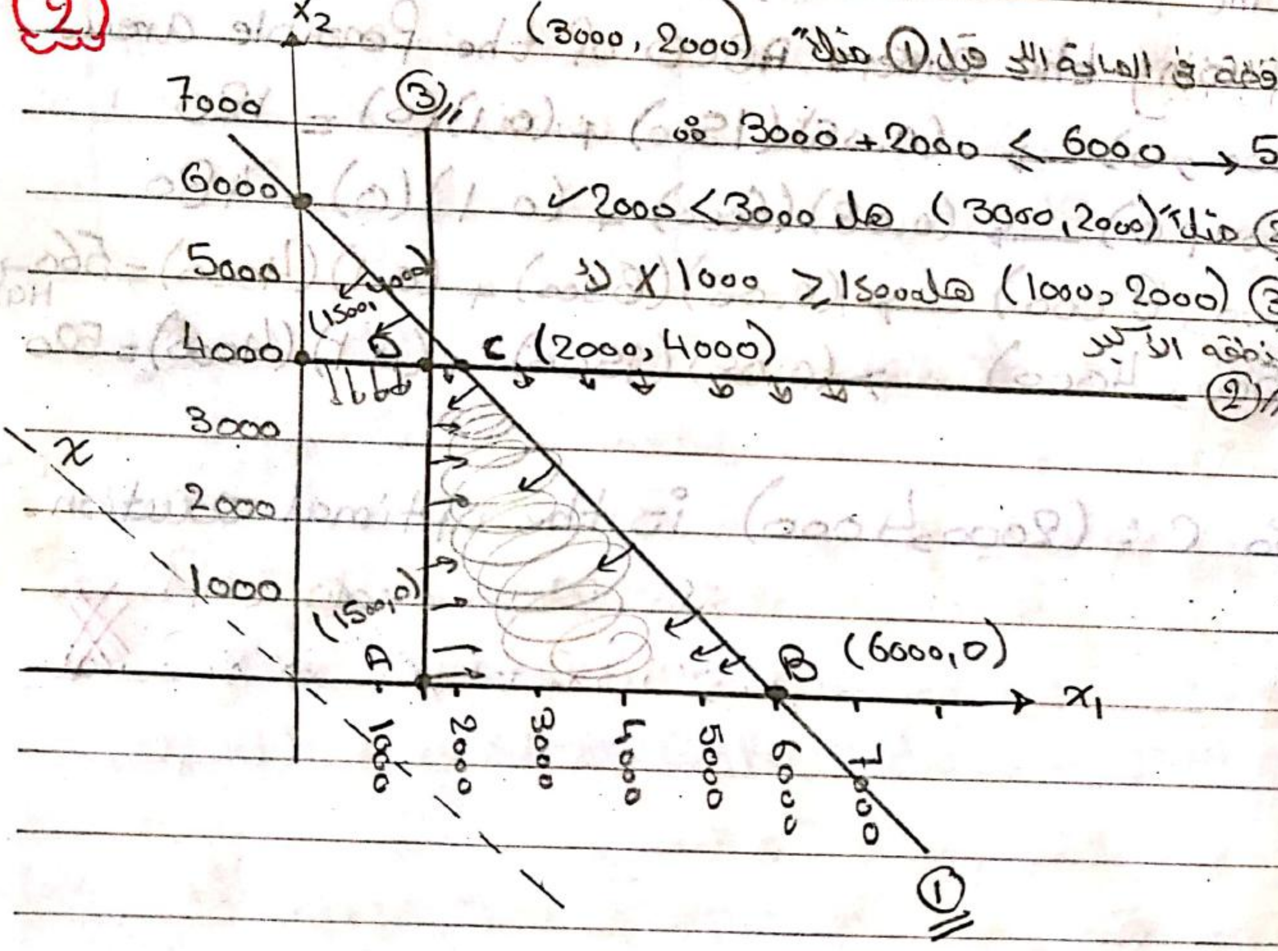
هقار نقطة في المادة اللي قبل ① مثلاً $(3000, 2000)$

$\therefore 3000 + 2000 \leq 6000 \rightarrow 5000 < 6000$

اللي قبل ② مثلاً $(3000, 2000)$ هل $2000 < 3000$ ✓

اللي قبل ③ $(1000, 2000)$ هل $1500 \leq 1000$ X لا

فهاخد المنطقة الأكبر



$C \Rightarrow$ intersection between ① and ②

$x_1 + x_2 = 6000 \longrightarrow$ ①

$x_2 = 4000 \longrightarrow$ ② Solve ①, ②, we get

$x_1 = 6000 - 4000 = 2000 \longrightarrow x_1 = 2000$

$\therefore C : (2000, 4000)$

Subject: Date:

D ⇒ intersection between ②" , ③"

$x_2 = 4000$, $x_1 = 1500$

∴ D: (1500, 4000)

③ The point that Max $Z = 0.08 X_1 + 0.1 X_2$

(a) using the line of Z :-

The Point C: (2000, 4000) is the optimal Solutions

(b) using the Corners ABCD of the feasible area:-

A: (1500, 0) → (0.08)(1500) + (0.1)(0) = 120

B: (6000, 0) → (0.08)(6000) + (0.1)(0) = 480

C: (2000, 4000) → (0.08)(2000) + (0.1)(4000) = 560 → Max

D: (1500, 4000) → (0.08)(1500) + (0.1)(4000) = 520

∴ C: (2000, 4000) is the optimal solution.

Date:

Problem (4) :- شركة بتشتغل ١٠ ساعات في اليوم بتصنع منتجين بيمروا على ٣ عمليات متتالية

A Company that operates 10 hours a day manufactures two Products on three sequential processes. The following table summarizes the data of the Problem:

Product	Minutes Per unit			unit Profit
	Process 1	Process 2	Process 3	
1	10	6	8	2 \$
2	5	20	10	3 \$

Determine the optimal max of the two products?

Solution

(1) Decision variables :- عدد الشحنات الناتجة من Product1

$x_1 \equiv$ number of units Produced of Product 1.

$x_2 \equiv$ number of units Produced of product 2.

(2) Modeling the Problem :-

Objective :- Max the Proft of two Products.

$$\text{Max}: Z = 2x_1 + 3x_2$$

ربح الـ unit الواحدة X عددهم تبعات الـ Prod2 يديني الربح الكلي تبع الـ Prod②

ربح الـ unit الواحدة X عددهم تبعات الـ Prod1 يديني الربح الكلي تبع الـ Product①

Date:

Subject:

Constraints :- A company operates at Max 10 hours $= 600$ min (10×60)

يعني لازم المنتجين في كل Process ميعديش الـ 10 ساعات اللي هي 600 دقيقة

Subject to

$$10x_1 + 5x_2 \leq 600$$

$$6x_1 + 20x_2 \leq 600$$

$$8x_1 + 10x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

لـ عدد الدقايق لكل unit من X عدديهم يعني الزمن الكلي لكل الـ units

$\hookrightarrow$ داه الـ hidden const عشان لازم العدد يبقى موجب

(3) Graphical Solution :-

① Let $10x_1 + 5x_2 = 600 \rightarrow$ ①

Put $x_1 = 0 \rightarrow 5x_2 = 600 \rightarrow x_2 = 120$

$\therefore$ 1st point of 1st line is $(0, 120)$

$x_2 = 0 \rightarrow 10x_1 = 600 \rightarrow x_1 = 60$

$\therefore$ 2nd point of 1st line is $(60, 0)$

Let $6x_1 + 20x_2 = 600 \rightarrow$ ②

Put $x_1 = 0 \rightarrow 20x_2 = 600 \rightarrow x_2 = 30$

$\therefore$ 1st point of 2nd line is $(0, 30)$

$x_2 = 0 \rightarrow 6x_1 = 600 \rightarrow x_1 = 100$

$\therefore$ 2nd point of 2nd line is $(100, 0)$

عشان أقرب

Subject: (21)

Date:

Let $8x_1 + 10x_2 = 600 \rightarrow$ ③

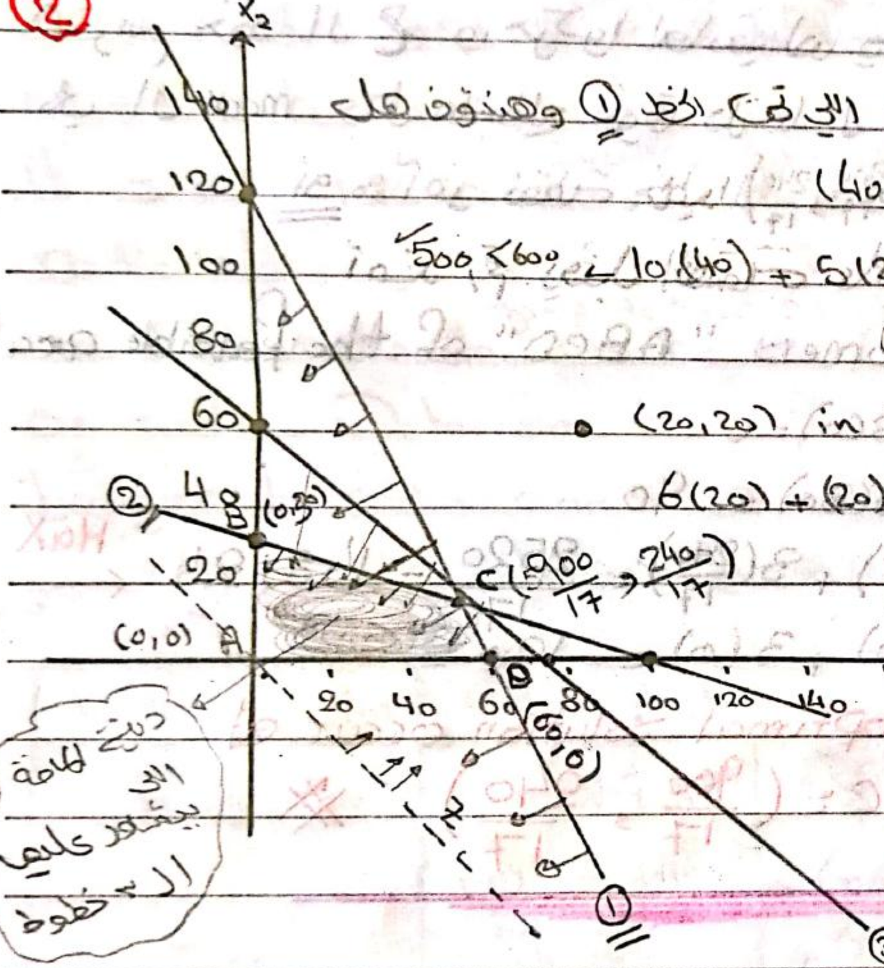
Put $x_1 = 0 \rightarrow 10x_2 = 600 \rightarrow x_2 = 60$

$\therefore$ 1st point of 3rd line is $(0, 60)$

$x_2 = 0 \rightarrow 8x_1 = 600 \rightarrow x_1 = 75$

$\therefore$ 2nd point of 3rd line is $(75, 0)$

②



• هنشوف نقطة واقعة في المساحة اللي تحت الخط ① وهنشوف هل هتحقق الشرط ولا. $(40, 20)$

هل $10(40) + 5(20) \leq 600$ ، $500 < 600$ ✓

بتحقق فهاي المنطقة اللي تحت الخط

• $(20, 20)$ in line ②

$6(20) + (20)(20) \overset{?}{\leq} 600 \rightarrow 520 < 600$

هاي المساحة اللي تحت الخط

• $(20, 20)$ in ③

$8(20) + 10(20) = 360 < 600$

هاي المساحة اللي تحت الخط

$C \Rightarrow$ نقطة تقاطع ① مع ② $\Leftarrow$ فبنحل المعادلتين ① و ② مع بعض عشان نجيب C

$10x_1 + 5x_2 = 600 \rightarrow$ ①

$6x_1 + 20x_2 = 600 \rightarrow$ ②

$6 \times$ ① $- 10 \times$ ②, we get

$60x_1 + 30x_2 = 3600$

$-60x_1 - 200x_2 = -6000$

$-170x_2 = -2400 \rightarrow x_2 = \frac{240}{17}$

$\therefore C: \left(\frac{900}{17}, \frac{240}{17}\right)$

العزيز

$\therefore$ using ①, $10x_1 + 5\left(\frac{240}{17}\right) = 600 \rightarrow 10x_1 + \frac{1200}{17} = 600$

$\rightarrow 10x_1 = \frac{9000}{17} \rightarrow x_1 = \frac{900}{17}$

$\ldots, x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0 \rightarrow$ hidden constrains $\rightarrow$ عدد ساعات لا يدفع يكون بالسالب

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

(3) ∵ ABCD → Feasible area.

(a) using The line of Z

Solve $2x_1 + 3x_2 = 0$

we have $(0,0)$, $(-3,2)$, $(3,-2)$

هـرسم خط الـ Z وأحركوا لغاية لما يخبط في آخر نقطة عشان يبقى في الـ max وكل ما بطلع فوق كل ما الـ Z هتزيـــد.

∴ آخر نقطة هي الـ $C: \left(\frac{900}{17}, \frac{240}{17}\right)$

(b) using the Corners "ABCD" of the Feasible area?

$A: (0,0) \longrightarrow 2(0) + 3(0) = 0$

$B: (0,30) \longrightarrow 2(0) + 3(30) = 90$

$C: \left(\frac{900}{17}, \frac{240}{17}\right) \longrightarrow 2\left(\frac{900}{17}\right) + 3\left(\frac{240}{17}\right) = \frac{2520}{17} = 148.24 \longleftarrow$ Max

$D: (60, 0) \longrightarrow 2(60) + 3(0) = 120$

∴ The optimal solution occur at

$C: \left(\frac{900}{17}, \frac{240}{17}\right)$ ※

Date:

Problem (5):

المحلي

Show and Sell can advertise its products on local radio and television (TV). The advertising budget is limited to \$ 10,000 a month. Each minute of radio advertising costs \$ 15 and each minute of TV commercials \$ 300. Show and Sell likes to advertise on radio at least twice as much as on TV. In the meantime, it is not practical to use more than 400 minutes of radio advertising a month. From past experience, advertising on TV is estimated to be 25 times as effective as on radio. Determine the optimum allocation of the budget to radio and TV advertising?

ويفضل بيع المنتجات على الراديو والتلفزيون المحلي
تقتصر ميزانية الإعلانات
كل دقيقة من الإعلانات الإذاعية تكلف \$15
وكل دقيقة في التلفزيون تكلف 300 \$
الإعلان على الـ radio مرتين على الأقل بقدر الإعلان على الـ TV
مستخدمش أكثر من 400 دقيقة من الإعلانات الإذاعية شهرياً
الإعلان على التلفزيون يكون فعال 25 ضعف على الراديو
ميزانية

عاوز تزود التأثير فهبدء على الميزانية الـ max كمان تزود التأثير الأهو هدف أكثر حاجة ايه

يعني نوع الإعلان على — تكلفة الدقيقة

advertising on	Minute Cost
Radio	\$ 15
TV	\$ 300

- The advertising budget is limited to \$ 10,000 a month.
  أقصى حد للميزانية هي \$ 10,000
- not use more than 400 min of radio advertising a month
  لاتستخدم أكثر من 400 دقيقة على الراديو
- advertising on TV is 25 times as effective as on radio
  الإعلان على الـ TV تأثيره 25 مرة أكثر من الـ Radio

Solution

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

(1) Decision Variables :

$x_1 \equiv$ number of minutes for radio per month

$x_2 \equiv$ number of minutes for TV per month.

(2) Modeling the Problem :- الهدف زيادة التأثير على ال x_1, x_2

$$\text{Max } Z = x_1 + 25 x_2.$$

subjected to

$$15x_1 + 300x_2 \leq 10,000$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_1 \geq 2x_2 \longrightarrow x_1 - 2x_2 \geq 0$$

(3) Graphical Solution :-

(1) let $15x_1 + 300x_2 = 10,000 \longrightarrow$ ①

at $x_1 = 0 \longrightarrow x_2 = \frac{10000}{300} \longrightarrow x_2 = \frac{100}{3}$

at $x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{10000}{15} \longrightarrow x_1 = \frac{2000}{3}$

Line ① $(0, \frac{100}{3}), (\frac{2000}{3}, 0)$

let $x_1 = 400 \longrightarrow$ ②

at $x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 400$

Line ② $(400, 0)$

let $x_1 - 2x_2 = 0 \longrightarrow$ ③

Subject:

Date:

at $X_1 = 0 \longrightarrow X_2 = 0$

at $X_2 = 0 \longrightarrow X_1 = 0$

Line 3 $(0, 0)$

Complete.....

Operations Research "OR": not Pure Mathematics, That uses techniques, statistics and Programming to arrive at optimal solutions to solve Complex Problems.

بحوث العمليات مقدرش أقول عليها إن هي Pure Math هي بتعالج مشاكل حقيقية في العالم اللي بنواجهها في الصناعة والزراعة والصحة باستخدام الرياضيات وهي مش بتحل وبس دي بتطور من حلولها لأفضل حل. وبستخدم الـ Programming لما يكون حل صعب وكبير.

① → Problem $\xrightarrow{\text{Convert}}$ Mathematics "equations" → Mathematical Modeling

كلام عادي

② Techniques to solve this Problem.

Formulation problem:-

→ Decision Variables:- Define the all Variables in the problems.

في الخطوة دي بعرف كل المتغيرات اللي عندي في المسألة مثلاً لو عندي عدد ساعات هيكون متغير بعبر عنها، عدد طاولات مثلاً بعضها هتكون متغير تاني وهكذا

- Objective: (**) Page(2) and (**) page(3)
- Constraints: (***) page(3) and (***) page(3)

Finally:- Target → optimal solution: بدور على أفضل حل اللي هو قيم الـ x_1 والـ x_2 ... مثلاً اللي هتحقق الـ objective اللي هتعلي الربح أو تقلل حاجة أو أوقات

نوعين من أنواع الـ Math Problem اللي هو الـ

- Linear programming $\xrightarrow{\text{linear. لما}}$ يكون شكل المعادلات بيكون معاها الأس 1 مثلاً

$$2x_1 + 4x_2 \le 5$$

power 1.

- non linear → معادلات مثلاً $\sin x, \cos x$، e^x، أس الدرجة 2, 3, n

Note: كل ما تزيد المشكلة بحجم إن نزيد الـ Constrains والـ Decision var كل ما بنحتاج إننا نستخدم الـ Computer أحول المشكلة لـ Coding عشان يسهل عليّ حل الـ complex problem

→ Optimal Solution: is a feasible solution where the objective function reaches its maximum or minimum value.

...ations Research "OR": not Pure Mathematics, That uses techniques, statistics and Programming to arrive at optimal solutions to solve complex Problems.

بحوث العمليات مقدرش أقول عليها إن هي Pure Math هي بتعالج مشاكل حقيقية في الحياة اللي بنواجهها في الصناعة والزراعة والصحة باستخدام الرياضيات وهي مش بتحل وبس دي بتطلع من كلها كل أفضل حل. وبستخدم ال Programming لأنه بيكون حلها صعب وكبيره.

① → Problem $\xrightarrow{\text{Convert}}$ Mathematics "equations" → Mathematical Modeling

كلام حلو جدا

② Techniques to solve this Problem.

Formulation problem:-

→ Decision variables: Define the all variables in the problems.

في الخطوة دي بعرف كل المتغيرات اللي عندي في المسألة مثلاً لو عندي عدد ساعات هيكون متغير معين، عدد حيوانات مثلاً يبقى متغير تاني وهكذا!

- Objective: (**) Page(2) and (**) page(2)
- Constraints: (***) page(3) and (***) page(3)

Finally: Target → optimal solution. بدور على أفضل حل اللي هو قيم ال x_1 وال x_2 ... x_n اللي هتحقق ال objective اللي عاوزه أوصله أعلى قيمة أو أقل

نوع من أنواع ال Math Problem اللي هو ال

- Linear programming $\xrightarrow{\text{linear}}$ عن شكل المعادلات بيكون خطي يعني الأس ١ مثلاً $2x_1+4x_2 \leq 5$ → power 1.

- non linear → e^x, x^3, الرتبة n، ممكن تكون فيها $\sin x, \cos x$

Note: كل ما تزيد المشكلة بيحتاج إن نزيد ال Constraints وال Decision var كل ما بنحتاج إننا نستخدم ال Computer أحول المشكلة لـ Coding عشان يسهل عليا حل ال complex problem

→ Optimal Solution: is a feasible solution where the objective function reaches its maximum or minimum value.

هو عاوز يشتغل على الأقل ٢٠ ساعة في الأسبوع
(26) لتأمين دخل، وهو بيروح المدرسة بس عنده فرصة يشتغل
في متجرين، في الأول ممكن يشتغل ما بين 5 إلى 12 ساعة
والتاني ممكن يشتغل ما بين 6 إلى 10 ساعات
الاتنين بيدفعوا نفس الأجر في الساعة، هو عاوز ياخذ قراره بناء على ضغط الشغل من خلال مقابلته
لناس بتشتغل بالفعل في المتجرين

Problem (6) :

John must work at least 20 hours a week to supplement his income while attending school. He has the opportunity to work in two retail stores. In store 1, he can work between 5 and 12 hours a week, and in store 2, he is allowed between 6 and 10 hours. both stores pay the same hourly wage. In deciding how many hours to work in each store, John want to base his decision on work stress. Based on interviews with present employees. John estimates that, on an ascending scale of 1 to 10, the stress factor are 8 and 6 at stor 1 and 2, respectively. Because stress factor by the hour, he estimate the total stress for each store at the end of the week is proportional to the number of the hours he works in the store. How many hours should John work in each store? هو عاوز يعرف هو هيشتغل في كل واحد كام ساعة بحيث إن يكون الـ stress أقل حاجة.

Solution:

- Decision variables:

  x_1 : Number of working hour in store 1 per week.

  x_2 : Number of working hour in stor 2 per week.

- objective:

  min stress $Z_{min} = 8x_1 + 6x_2$

- subject to "constrains"

$x_1 + x_2 \geq 20$

$x_1 \geq 5$, $x_1 \leq 12$

العزيز

$x_2 \geq 6$, $x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$ → hidden constrains → عدد ساعات لا ينفع يكون السالب